



Volume 2, Issue 2(15), 2023

Journal of Physics and Technology Education



<https://phys-tech.jdpu.uz/>

Chief Editor:

Sharipov Shavkat Safarovich

Doctor of pedagogy, Professor, Rector of Jizzakh State Pedagogical University, Uzbekistan

Deputy Chief Editor:

Sodikov Khamid Makhmudovich

The Dean of the Faculty of Physics and Technological Education, dotsent

Orishev Jamshid Bahodirovich

Teacher of Jizzakh State Pedagogical University, Uzbekistan

Members of the editorial board:

Ubaydullaev Sadulla, dotsent

Ismailov Tuychi Djabbarovich, dotsent

Kholmatov Pardaboy Karabaevich, dotsent

Umarov Rakhim Tojievich, dotsent

Murtazaev Melibek Zakirovich, dotsent

Abduraimov Sherali Saidkarimovich, dotsent

Taylanov Nizom, senior teacher

Tagaev Khojamberdi, senior teacher

Tugalov Farkhod Karshibayevich, PhD

Alibaev Turgun Chindalievich, PhD

Yusupov Mukhammad Makhmudovich, PhD

Kurbonov Nuriddin Yaxyakulovich, PhD

Irmatov Fozil Muminovich, PhD

Editorial Representative:

Jamshid Orishev

Phone: +998974840479

e-mail:

jamshidorishev@gmail.com

**ONLINE ELECTRONIK
JOURNAL**

“Fizika va texnologik ta’lim” jurnali

Журнал “Физико-технологического образование”

“Journal of Physics and Technology Education”

Indexed By:



Published By:

<https://phys-tech.jdpu.uz/>
Jizzakh State Pedagogical University, Uzbekistan

Nashr kuni: 2023-04-25

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕНА-КАНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

*Тайланов Низам Абдураззакович, Убайдуллаев Садулла,
Тилавова Турдихол Баратовна*

*Джизакский государственный педагогический университет,
Джизак, Узбекистан
e-mail: taylanov@yandex.ru*

Аннотация. В данной статье мы изучали численный метод для движения по средней кривизне кривых на поверхности в трехмерном пространстве с использованием уравнения Аллена-Кана. При этом мы использовали узкополосный домен и применяли гибридный явный численный метод, основанный на методе расщепления операторов. Для ячеек границы домена мы используем интерполяцию с использованием метода ближайшей точки.

Ключевые слова: уравнение Аллена-Кана, численный метод, операторный метод расщепления, средняя кривизна.

Numerical method for motion by mean curvature of curves on a surface in three-dimensional space

Abstract: In this paper we develop a fast and accurate numerical method for motion by mean curvature of curves on a surface in three-dimensional space using the Allen–Cahn equation. We use a narrow band domain. We adopt a hybrid explicit numerical method which is based on an Fourier spectral method. For the domain boundary cells, we use an interpolation using the closest point method.

Keywords: Allen-Cahn equation, numerical method, operator splitting method, mean curvature.

Davrili allen-kan tenglamasining son echimlari chegara shartlari

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz Allen-Kan tenglamasidan foydalangan holda uch o'lchovli fazoda sirdagi egri chiziqlarning o'rtacha egri chizig'i bo'ylab harakatlanishning raqamli usulini o'rgandik. Bunday holda, biz tor diapazonli domendan foydalandik va operatorni ajratish usuliga asoslangan gibrid aniq raqamli usulni qo'lladik. Domen chegarasi kataklari uchun biz eng yaqin nuqta interpolyatsiyasidan foydalanamiz.

Kalit so'zlar: Allen-Kan tenglamasi, sonli usul, operator bo'lish usuli, o'rtacha egrilik

Введение

Уравнение Аллена-Кана уже много лет является предметом обширных исследований [1-3]. Это уравнение представляет собой особый тип нелинейного уравнения в частных производных и первоначально использовалось для решения задач о фазовых переходах, таких как переход

термодинамической системы из одной фазы в другую [1]. Он также широко используется во многих сложных задачах с подвижной границей раздела в физике твердого тела и гидродинамике, таких как поток средней кривизны, анализ изображений, рост кристаллов, текучесть мембран, зародышеобразование твердых тел и смесь двух несжимаемых жидкостей [1-3]. В этой статье мы предлагаем численный метод в узкополосной области для движения по средней кривизне на поверхности в трехмерном пространстве с использованием уравнения Аллена-Кана. Предлагаемый гибридный явный численный метод основан на методе расщепления операторов [3].

Методология исследования

Рассмотрим движение по средней кривизне кривых на поверхности в трехмерном пространстве. Мы используем следующее уравнение Аллена-Кана

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (0 < t \leq T). \quad (1)$$

$$f(u) := F'(u); \quad F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2,$$

где $u(x, t)$ – разность концентраций компонентов двух смесей. Параметр ε – коэффициент энергии градиента, связанный с межфазной энергией. Уравнение Аллена – Кана демонстрирует устойчивое равновесие при $u = \pm 1$, в то время как $u = 0$ является неустойчивым равновесием. Решения часто проявляют метастабильность, когда лунки $u \approx -1$ конкурируют с пиками $u \approx 1$, а структуры остаются почти неизменными в течение длительных периодов времени, прежде чем внезапно измениться.

Проблема средней кривизны

Одним из хорошо проанализированных решений уравнения переменного тока является движение по окружности, поэтому здесь мы рассматриваем уравнение (1) с радиально-симметричным круговым интерфейсом с центром в $(0,5, 0,5)$ в качестве начального условия для области $W = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$u(x, y, 0) = \tanh \left(\frac{R_0 - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right). \quad (3)$$

Мы провели численный эксперимент с начальным радиусом $R=0.2$, $\varepsilon=0.01$ с помощью предложенного метода до времени $t=0.0325$ и зафиксировали профили решения для $t=0.0075$, $t=0.0015$ и $t=0.0325$. Как можно увидеть из рисунки 1, с течением времени радиус круга уменьшается со скоростью кривизны круг и исчезает, когда время t больше, чем $0.5R^2$. Полученные нам результаты хорошо согласуются с предложенной теорией исчезновения круга за время большее, чем $0.5R^2$ [3].

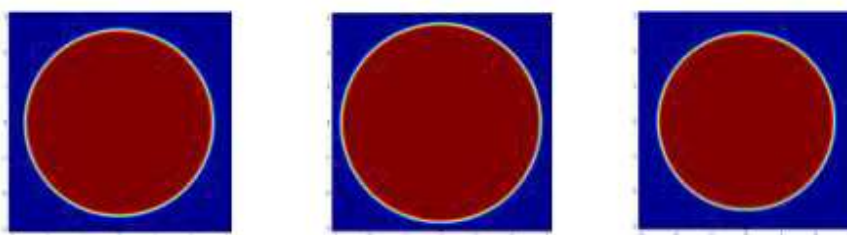


Рис1. Эволюция во времени для уравнения Аллена-Кана для $t = 0, 0.0075, 0.015$ и $t = 0.0352$

На Рис. 1-2 показаны результаты численного тестирования при для $t=0.0352, 0.0680$ и 0.0850 . уравнения с использованием спектрального метода Фурье. Здесь мы используем $N_x = N_y = 128$, $h = 2\pi/128$, $\varepsilon = 0.05$ и $\Delta t = 0.0001$. Окончательное время $t = 0.0850$. Результаты отражают движение по средней кривизне, характерной для уравнения переменного тока.

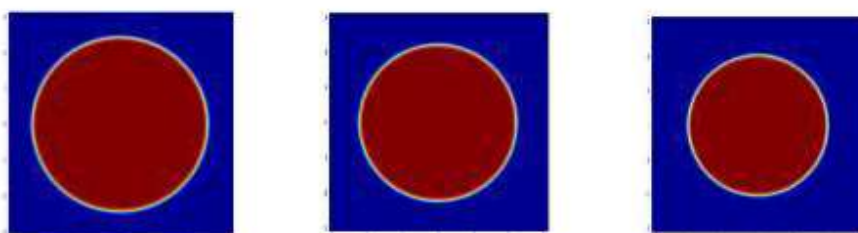


Рис2. Эволюция во времени для уравнения Аллена-Кана для $t=0.0352, 0.0680$ и 0.0850 ,

Вывод

Предлагаемый гибридный явный численный метод основан на методе расщепления операторов. Настоящий метод является очень надежным, простым, с небольшими вычислительными затратами, гибким и удобным

альтернативным методом. Предложенная схема может быть использована в широком классе нелинейных параболических уравнений реакции-диффузии, описывающих различные физические, биологические и задачи массо- и теплопереноса, химической кинетики.

Литература

1. S.M. Allen, J.W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall.* 1979, 27, 1085–1095.
2. J.W. Choi, H.G. Lee, D. Jenog, J. Kim. An unconditionally gradient stable numerical method for solving the Allen–Cahn equation. *Physica A* 2009, 388, 1791–1803.
3. J. Zhang, Q. Du. Numerical studies of discrete approximations to the Allen–Cahn equation in the sharp interface limit. *SIAM J. Sci. Comput.* 2009, 31, 3042–3063.
4. S.M. Cox, P.C. Matthews. Exponential Time Differencing for Stiff Systems, *J. Comput. Phys.* 2002, 176, 430–455.