# ОБ ОДНОМ ИМПУЛЬСНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ФРЕДГОЛЬМА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

*Юлдашев Турсун Камалдинович*

*Ташкентский государственный экономический университет,*

*Улица Каримова, 49, Ташкент, 100066, Узбекистан*

*E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com*

*https://orcid.org/0000-0002-9346-5362*

*Файзиев Азиз Кудратиллаевич*

*Ташкентский государственный экономический университет,*

*Улица Каримова, 49, Ташкент, 100066, Узбекистан*

*E-mail: fayziyev.a@inbox.ru*

*https://orcid.org/0000-0001-6798-3265*

*Полатов Шодиёр Шокир оглы*

*Джизакский государственный педагогический университет,*

*Джизак, Узбекистан*

*E-mail: shodiyorpolatov718@gmail.com*

*https://orcid.org/0000-0001-9436-2966*

**Аннотация.** Изучена однозначная разрешимость начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка с импульсными воздействиями и вырожденным ядром. Модифицирован метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных третьего порядка с учетом импульсных воздействий. Задача сведена к решению системы функционально-алгебраических уравнений. После решения системы функционально-алгебраических уравнений получено нелинейное функционально-интегральное уравнение. Далее, использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

**Ключевые слова:** Начальная задача, импульсное воздействие, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, функционально-алгебраическая система уравнений, однозначная разрешимость.

## ON A FREDHOLM PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH IMPULSIVE EFFECT AND DEGENERATE KERNEL

*Yuldashev Tursun Kamaldinovich*
*Tashkent State University of Economics,*
*Karimov Street, 49, Tashkent, 100066, Uzbekistan*
*E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com*
*https://orcid.org/0000-0002-9346-5362*
*Fayziyev Aziz Kudratillayevich*
*Tashkent State University of Economics,*
*Karimov Street, 49, Tashkent, 100066, Uzbekistan*
*E-mail: fayziyev.a@inbox.ru*
*https://orcid.org/0000-0001-6798-3265*
*Polatov Shodiyor Shokir o'g'li*
*Jizzakh State Pedagogical University, Jizzakh, Uzbekistan*
*E-mail: shodiyorpolatov718@gmail.com*
*https://orcid.org/0000-0001-9436-2966*

**Annotation.** One value solvability of the initial value problem for a nonlinear partial Fredholm integro-differential equation of the third order with degenerate kernel and impulsive effect is studied. The method of Fredholm integral equations of the second kind is modified to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the third order with impulsive effect. The problem is reduced to solving a system of functional-algebraic equations. After solving the system of functional-

algebraic equations it is obtained the nonlinear functional-integral equation. The method of successive approximations combined it with the method of compressing maps is used.

**Key words:** Initial value problem, impulsive effect, integro-differential equation, degenerate kernel, system of functional-algebraic equations, one valued solvability.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных и краевых задач для уравнений, имеющих импульсное воздействие. Теория начальных и краевых задач для уравнений с импульсными воздействиями в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений [1-6]. Представляют большой интерес с точки зрения приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков с импульсными воздействиями. Сегодня встречаются большое количество публикаций, посвященные уравнениям с импульсными воздействиями [1-27].

В настоящей работе приводится результаты исследования начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром и импульсными воздействиями. В данной работе, в отличие от работы [28], поставленная задача рассматривается в классе кусочно-непрерывных функций, имеющих разрывы первого рода.

Итак, рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}^+$ для первой переменной $t \neq t_i,\ i=1,2,...,p$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \lambda \int_0^T K(t,s)\,\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}ds\right) = f\left(x, \int_0^T \int_0^\infty H(s,y)u(s,y)\,dy\,ds\right) \qquad (1)$$

с начальными условиями относительно обоих переменных

$$u_x(0,x)=\varphi_1(x)\,,\;\; u_{tx}(0,x)=\varphi_2(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{2}$$

$$u(t,0)=\psi(t),\; t\in\Omega_T \tag{3}$$

и импульсными условиями

$$u_x\left(t_k^+,x\right)-u_x\left(t_k^-,x\right)=F_k\left(u\left(t_k,x\right)\right),\quad k=1,2,...,p, \tag{4}$$

$$u_t\left(t_k^+,x\right)-u_t\left(t_k^-,x\right)=G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right),\quad k=1,2,...,p, \tag{5}$$

где $f(x,\gamma)\in C\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$, $\varphi_j(x)\in C^1(\mathbb{R}^+)$, $j=1,2$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)\,b_i(s)$,

$0\neq a_i(t), b_i(s)\in C(\Omega_T)$, $\Omega_T\equiv\left[0,T\right]$, $\mathbb{R}^+\equiv\left[0,\infty\right)$, $\lambda-$ параметр,

$t\neq t_k$, $k=1,2,...,p$, $0=t_0<t_1<...<t_p<t_{p+1}=T<\infty$, $0<\int\limits_0^T\int\limits_0^\infty\left|H(t,x)\right|dx\,dt<\infty$,

$u\left(t_k^+,x\right)=\lim\limits_{\nu\to 0^+}u\left(t_k+\nu,x\right)$, $u\left(t_k^-,x\right)=\lim\limits_{\nu\to 0^-}u\left(t_k-\nu,x\right)$ правосторонными и левосторонными пределами функции $u(t,x)$ в точках $t=t_k$, соответственно.

Мы будем оперироваться со следующими банаховыми пространствами: пространство $C\left(\Omega,\mathbb{R}\right)$ непрерывных функций $u(t,x)$ с нормой

$$\|u\|_C=\sup_{(t,x)\in\Omega}\left|u(t,x)\right|;$$

линейное пространство кусочно-непрерывных функций

$$PC\left(\Omega,\mathbb{R}\right)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R};\, u(t,x)\in C\left(\Omega_{k,k+1},\mathbb{R}\right),\, k=1,...,p\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{PC}=\sup\left\{\|u\|_{C(\Omega_{k,k+1})},\, k=1,2,...,p\right\},$$

где $\Omega_{k,k+1}=\left(t_k,t_{k+1}\right]\times\mathbb{R}^+$, $u\left(t_k^+,x\right)$ и $u\left(t_k^-,x\right)$ $(k=0,1,...,p)$ существуют и ограничены; $u\left(t_k^-,x\right)=u\left(t_k,x\right)$.

**Задача.** Найти функцию $u(t,x)\in PC(\Omega,\mathbb{R})$, которая для всех $(t,x)\in\Omega,\; t\neq t_k,\; k=1,2,...,p$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1), начальные условия (2), (3) и для $(t,x)\in\Omega,\ t=t_k,\ k=1,2,...,p$ удовлетворяет и импульсные условия (4), (5).

В уравнении (1) сделаем несложную замену $u_{tx}(t,x)=\vartheta(t,x).$ Тогда уравнение (1) приобретает более простой вид

$$\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}-\lambda\int_0^T K(t,s)\ \vartheta(s,x)ds=f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(s,y)u(s,y)d\,y\,d\,s\right). \quad (6)$$

Уравнение (6) рассматривается при соответствующих начальном и импульсном условий

$$\vartheta(0,x)=\varphi_2(x),\quad x\in\mathbb{R}^+, \quad (7)$$

$$\vartheta\left(t_k^+,x\right)-\vartheta\left(t_k^-,x\right)=G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right),\qquad k=1,2,...,p. \quad (8)$$

С помощью обозначения

$$c_i(x)=\int_0^T b_i(s)\,\vartheta(s,x)\,ds \quad (9)$$

уравнение (6) приобретает ещё более простой вид

$$\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}=\lambda\sum_{i=1}^n a_i(t)\cdot c_i(x)+f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(s,y)u(s,y)d\,y\,d\,s\right).$$

Пусть функция $u(t,x)\in PC(\Omega,\mathbb{R})$ является решением задачи (1)-(5). Область $\Omega$ мы разделим на несколько подобластей $\Omega=\Omega_{0,1}\cup\Omega_{1,2}\cup\cdots\cup\Omega_{p,p+1}$, где $\Omega_{k,k+1}=\left(t_k,t_{k+1}\right]\times\mathbb{R}^+$. Путем интегрирования по $t$ последнее уравнение на каждом из этих подобластей $\Omega_{0,1},\Omega_{1,2},\cdots,\Omega_{p,p+1}$ и с учетом условия $\vartheta(0^+,x)=\vartheta(0,x),\ \vartheta(t_{p+1}^-,x)=\vartheta(t,x)$ получаем

$$\lambda\sum_{i=1}^n c_i(x)\cdot\int_0^t a_i(s)d\,s+t\cdot f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\theta,y)u(\theta,y)dy\,d\theta\right)=$$

$$=\left[\vartheta\left(t_1,x\right)-\vartheta\left(0^+,x\right)\right]+\left[\vartheta\left(t_2,x\right)-\vartheta\left(t_1^+,x\right)\right]+...+\left[\vartheta(t,x)-\vartheta\left(t_p^+,x\right)\right]=$$

$$=-\vartheta(0,x)-\left[\vartheta\left(t_1^+,x\right)-\vartheta\left(t_1,x\right)\right]-\left[\vartheta\left(t_2^+,x\right)-\vartheta\left(t_2,x\right)\right]-...-$$

$$-\left[\vartheta\left(t_p^+,x\right)-\vartheta\left(t_p,x\right)\right]+\vartheta(t,x).$$

Подчиняя последнее уравнение начальному (7) импульсному (8) условиям, получаем

$$\vartheta(t,x)=\varphi_2(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\int_0^t a_i(s)\,ds+$$

$$+t\cdot f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\theta,y)u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right)+\sum_{0<t_k<t}G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right). \qquad (10)$$

Для определения временной неизвестной функции $c_i(x)$, подставляем представление (10) в обозначение (9) и имеем функциональную систему

$$c_i(x)=\int_0^T b_i(s)\left[\varphi_2(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j(x)\cdot\int_0^s a_j(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+s\cdot f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\xi,y)u(\xi,y)\,dy\,d\xi\right)+\sum_{0<t_k<s}G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right)\right]ds. \qquad (11)$$

Примем обозначение

$$A_{ij}=\int_0^T b_i(s)\int_0^s a_j(\theta)\,d\theta\,ds,\quad B_i(x)=B_{1i}(x)+B_{2i}(x,u)+B_{3i}(x,u_k),\ i,j=1,\dots,n,$$

where

$$B_{1i}(x)=\varphi_2(x)\int_0^T b_i(s)ds,$$

$$B_{2i}(x,u)=f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\xi,y)u(\xi,y)\,dy\,d\xi\right)\int_0^T s\cdot b_i(s)\,ds,$$

$$B_{3i}(x,u_k)=\int_0^T b_i(s)\sum_{0<t_k<s}G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right)ds.$$

Тогда из (11) получаем в упрощенной форме следующую систему функционально-алгебраических уравнений (СФАУ)

$$c_i(x)-\lambda\sum_{j=1}^{n}A_{ij}c_j(x)=B_i(x)\ ,\ \ i=1,\dots,n. \qquad (12)$$

СФАУ (12) однозначно разрешима при любых конечных $B_i(x)$, если выполняется следующее условие Фредгольма

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \ldots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \ldots & -\lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{13}$$

Рассмотрим такие значения $\lambda$, при которых выполняется условие (13). Тогда решения СФАУ (12) записываются в виде

$$c_i(x)=\frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)+\Delta_{2i}(\lambda,x,u)+\Delta_{3i}(\lambda,x,u_k)}{\Delta(\lambda)}, \quad i=1,...,n, \tag{14}$$

где

$$\Delta_{ji}(\lambda,x)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{j1}(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \ldots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{j2}(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_{n1} & \ldots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{jn}(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix},$$

$j=1,2,3.$

Подставляя это решение (14) СФАУ в представление (10), имеем следующее уравнение

$$\vartheta(t,x)=\varphi_2(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)+\Delta_{2i}(\lambda,x,u)+\Delta_{3i}(\lambda,x,u_k)}{\Delta(\lambda)}\int_0^t a_i(s)\,ds+$$

$$+t\cdot f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\theta,y)u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right)+\sum_{0<t_k<t}G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right). \tag{15}$$

Теперь уравнение (15) записываем в следующем виде

$$u_{tx}(t,x)=\varphi_2(x)\sigma_1(t)+\sigma_2(t)\,f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\xi,y)u(\xi,y)\,dy\,d\xi\right)+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{3i}(\lambda,x,u_k)}{\Delta(\lambda)}\int_0^t a_i(s)\,ds+\sum_{0<t_k<t}G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right), \tag{16}$$

где

$$\sigma_1(t)=1+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{\Delta}_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^t a_i(s)\,ds,\;\; \sigma_2(t)=t+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{\Delta}_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^t a_i(s)\,ds,$$

$$\overline{\Delta}_{ji}(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & -\lambda A_{1(i-1)} & \overline{B}_{j1} & -\lambda A_{1(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \ldots & -\lambda A_{2(i-1)} & \overline{B}_{j2} & -\lambda A_{2(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_{n1} & \ldots & -\lambda A_{n(i-1)} & \overline{B}_{jn} & -\lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix},\;\; j=1,2, \tag{17}$$

$$\overline{B}_{1i}=\int_0^T b_i(s)ds,\quad \overline{B}_{2i}=\int_0^T s\cdot b_i(s)ds,\;\; i=1,\ldots,n.$$

Отсюда, с учетом условий (2) и (4) интегрируем уравнение (16) по $t$ в каждом из подобластях $\Omega_{0,1},\Omega_{1,2},\cdots,\Omega_{p,p+1}$ и с учетом условий $u(0^+,x)=u(0,x)$, $u(t_{p+1}^-,x)=u(t,x)$, получаем

$$u_x(t,x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)q_1(t)+f\left(x,\int_0^T\int_0^\infty H(\xi,y)u(\xi,y)\,dy\,d\xi\right)q_2(t)+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{3i}(\lambda,x,u_k)}{\Delta(\lambda)}q_{3i}(t)+\sum_{0<t_k<t}s\cdot G_k\left(u\left(t_k,x\right)\right)+\sum_{0<t_k<t}F_k\left(u\left(t_k,x\right)\right), \tag{18}$$

где $q_j(t)=\int_0^t\sigma_j(s)ds,\;\; j=1,2,\quad q_{3i}(t)=\int_0^t(t-s)a_i(s)\,ds,\;\; i=1,\ldots,n.$

Теперь уравнение (18) интегрируем по $x$:

$$u(t,x)=\Im(t,x;u)\equiv\Phi(t,x)+q_2(t)\int_0^x f\left(y,\int_0^T\int_0^\infty H(\xi,z)u(\xi,z)\,dz\,d\xi\right)dy+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}q_{3i}(t)\int_0^x\frac{\Delta_{3i}(\lambda,y,u_k)}{\Delta(\lambda)}dy+\int_0^x\sum_{0<t_k<t}s\cdot G_k\left(u\left(t_k,y\right)\right)dy+\int_0^x\sum_{0<t_k<t}F_k\left(u\left(t_k,y\right)\right)dy, \tag{19}$$

где

$$\Phi(t,x)=\psi(t)+\int_0^x\left(\varphi_1(y)+\varphi_2(y)q_1(t)\right)dy.$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия (13) и

1). $M_1 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^x \left| f(y,u) \right| dy < \infty;$

2). $M_{2k} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^x \left| F_k\left(u\left(t_k, y\right)\right) \right| dy < \infty, \ \ M_{3k} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^x \left| G_k\left(u\left(t_k, y\right)\right) \right| dy < \infty, \ k = 1, ..., p;$

3). $\left| f(x,u_1) - f(x,u_2) \right| \le L_1(x) \left| u_1 - u_2 \right|, \ 0 < L_1(x) \in C(\mathbb{R}^+);$

4). $\left| F_k(u_1) - F_k(u_2) \right| \le L_{2k}(x) \left| u_1 - u_2 \right|, \ 0 < L_{2k}(x) \in C(\mathbb{R}^+), \ k = 1, ..., p;$

5). $\left| G_k(u_1) - G_k(u_2) \right| \le L_{3k}(x) \left| u_1 - u_2 \right|, \ 0 < L_{3k}(x) \in C(\mathbb{R}^+), \ k = 1, ..., p;$

6). $\rho < 1,$ где $\rho$ определяется из (24) внизу.

Тогда в области $\Omega$ существует единственное решение начальной импульсной задачи (1)-(5).

**Доказательство.** Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (19)

$$\begin{cases} u_0(t,x) = \Phi(t,x), \\ u_{m+1}(t,x) = \Im(t,x;u_m), \ m = 0,1,2, ... \end{cases} \tag{20}$$

Для нулевого приближения из (20) имеем оценку

$$\left| u_0(t,x) \right| \le \sup_{(t,x) \in \Omega} \left| \Phi(t,x) \right| \le \max_{t \in \Omega_T} \left| \psi(t) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^x \left( \left| \varphi_1(y) \right| + \delta_0 \left| \varphi_2(y) \right| \right) dy < \infty, \tag{21}$$

где

$$\delta_0 = \max_{t \in \Omega_T} \left| q_1(t) \right| \le \max_{t \in \Omega_T} \int\limits_0^t \left| \sigma_1(s) \right| ds \le \max_{t \in \Omega_T} \int\limits_0^t \left| 1 + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\overline{\Delta}_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^s a_i(\theta) d\theta \right| ds < \infty,$$

$\overline{\Delta}_{1i}(\lambda)$ определяется из (17).

Для первой разности приближения (20) получаем оценку

$$\left| u_1(t,x) - u_0(t,x) \right| \le q_2(t) \int\limits_0^x f\left( y, \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty H(\xi,z) u_0(\xi,z) dz\, d\xi \right) dy +$$

$$+ \left| \lambda \right| \sum_{i=1}^n \left| q_{3i}(t) \right| \int\limits_0^x \left| \frac{\Delta_{3i}(\lambda, y, u_{0k})}{\Delta(\lambda)} \right| dy + T \int\limits_0^x \sum_{0 < t_k < t} \left| G_k\left(u_0\left(t_k, y\right)\right) \right| dy + \int\limits_0^x \sum_{0 < t_k < t} \left| F_k\left(u_0\left(t_k, y\right)\right) \right| dy \le$$

$$\leq \delta_1 M_1 + \sum_{k=1}^{p}\left[\left(T + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \delta_{2i} \left|\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|\right) M_{2k} + M_{3k}\right] < \infty, \tag{22}$$

где

$$\delta_1 = \max_{t\in\Omega_T} |\, q_2(t)\,| \leq \max_{t\in\Omega_T} \int_0^t |\sigma_2(s)| ds \leq \max_{t\in\Omega_T} \int_0^t \left| s + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta}_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^s a_i(\theta)\, d\theta \right| ds < \infty,$$

$$\delta_{2i} = \max_{t\in\Omega_T} |\, q_{3i}(t)\,|, \;\; q_2(t) = \int_0^t \sigma_2(s) ds, \; \overline{\Delta}_{2i}(\lambda) \text{ определяется из (17),}$$

$$q_{3i}(t) = \int_0^t (t-s) a_i(s)\, ds, \;\; \sigma_2(t) = t + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta}_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^t a_i(s)\, ds, \;\; i = 1,\dots,n.$$

Далее, для произвольной разности последовательных приближений (20) имеем

$$|u_{m+1}(t,x) - u_m(t,x)| \leq |q_2(t)| \int_0^x L_1(y) dy \int_0^T \int_0^\infty |H(\xi,z)| \cdot |u_{m+1}(\xi,z) - u_m(\xi,z)|\, dz\, d\xi +$$

$$+ |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |q_{3i}(t)| \int_0^x \sum_{k=1}^{p} L_{3k}(y) \left|\frac{\overline{\Delta}_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| |u_{m+1}(t_k,y) - u_m(t_k,y)|\, dy +$$

$$+ \int_0^x \sum_{k=1}^{p} \left[L_{2k}(y) + T \cdot L_{3k}(y)\right] |u_{m+1}(t_k,y) - u_m(t_k,y)|\, dy.$$

Отсюда имеем, что справедлива оценка

$$\left\| u_{m+1}(t,x) - u_m(t,x) \right\|_{PC} \leq \rho \cdot \left\| u_m(t,x) - u_{m-1}(t,y) \right\|_{PC}, \tag{23}$$

где

$$\rho = \delta_1 \delta_3 \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^x L_1(y) dy +$$

$$+ |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \delta_{2i} \left|\frac{\overline{\Delta}_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^x \sum_{k=1}^{p} L_{3k}(y) dy + \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^x \sum_{k=1}^{p} \left[L_{2k}(y) + T \cdot L_{3k}(y)\right] dy, \tag{24}$$

$\delta_3 = \int_0^T \int_0^\infty |\, H(t,x)\,|\, dx\, dt,\;\; \overline{\Delta}_{1i}(\lambda)$ определяются из (17).

Из оценок (21)-(23) следует, что оператор в правой части (19) является сжимающим. Следовательно, в области $\Omega$ начальная импульсная задача (1)-(5) имеет единственное решение.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. *Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application*. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсивных систем. Мир, Москва, 1971. 309 с.

3. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of impulsive differential equations*. World Scientific, Singapore, 1989. 434 p.

4. Perestyk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. *Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities*. DeGruyter Stud. 40, Math. Walter de Gruter Co., Berlin, 2011.

5. Samoilenko A.M., Perestyk N.A. *Impulsive differential equations*. World Sci., Singapore, 1995.

6. Stamova I., Stamov G. *Impulsive biological models. In: Applied impulsive mathematical models*. CMS Books in Mathematics. Springer, Cham. 2016.

7. Catlla J., Schaeffer D.G., Witelski Th.P., Monson E. E., Lin A.L. On spiking models for synaptic activity and impulsive differential equations. *SIAM Review*. 2008, 50 (3), P 553–569.

8. Fedorov E.G., Popov I.Yu. Analysis of the limiting behavior of a biological neurons system with delay. *J. Phys.: Conf. Ser*. 2021, 2086, 012109.

9. Fedorov E.G., Popov I.Yu. Hopf bifurcations in a network of Fitzhigh-Nagumo biological neurons. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2021.

10. Fedorov E.G. Properties of an oriented ring of neurons with the FitzHugh-Nagumo model. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2021, 12 (5), P. 553– 562.

11. Anguraj A., Arjunan M.M. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations. *Elect. J. of Differential Equations*. 2005, 2005 (111), 1–8.

12. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Advances in Difference Equations*. 2013, 2013 (173).

13. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions. *Elect. J. of Differential Equations*. 2013, 2013 (80), 1–11.

14. Bin L., Xinzhi L., Xiaoxin L. Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems. *Acta Mathematika Scientia*. 2005, 25 (1), P. 161– 169.

15. Mardanov M.J., Sharifov Ya.A., Habib M.H. Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Electr. J. of Differential Equations*. 2014, 2014 (259), 1–8.

16. Sharifov Y.A., Mammadova N.B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions. *Differential equations*. 2014, 50 (3), P. 403–411.

17. Sharifov Y.A. Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions. *Ukrainain Math. Journ.* 2012, 64 (6), P. 836–847.

18. Yuldashev T.K., Fayziev A.K. On a nonlinear impulsive differential equations with maxima. *Bull. Inst. Math.* 2021, 4 (6), P. 42–49.

19. Yuldashev T.K., Fayziev A.K. On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2022, 13 (1), P. 36–44.

20. Bai Ch., Yang D. Existence of solutions for second-order nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary value conditions. *Boundary Value Problems (Hindawi Publishing Corporation)*, 2007, 2007 (41589), 1–13.

21. Chen J., Tisdell Ch.C., Yuan R. On the solvability of periodic boundary value problems with impulse. *J. of Math. Anal. and Appl.* 2007, 331, P. 902–912.

22. Li X., Bohner M., Wang Ch.-K. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications. *Automatica* 2015, 52, P. 173–178.

23. Hu Z., Han M. Periodic solutions and bifurcations of first order periodic impulsive differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2009, 19 (8), P. 2515–2530.

24. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima. Nonosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2022, 13 **(**2), 135–141.

25. Yuldashev T.K. Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2022, 26 **(**2), 368–379.

26. Ma R., Yang B., Wang Z. Bifurcation of positive periodic solutions of first-order impulsive differential equations. *Boundary Value Problems*. 2012, 2012 (83), 1–16.

27. Gladilina R. I., Ignatyev A. O. On the stability of periodic impulsive systems. *Math. Notes*. 2004, 76 (1), P. 41–47.

28. Юлдашев Т.К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка. *Изв. вузов. Математика.* 2015, № 9, 74–79.