Ikki o'lchamli panjaradagi bir zarrachali Shrodinger operatori va uning spectral xossalari

Mavlanova Mohinur Jaxongirovna

JDPI magistranti

Annotatsiya. Ishda ikki o'lchamli butun sonli panjadagi bir zarrachali h Shrodinger operatori qaralgan va uning spectral xossalari o'rganilgan. Istalgan μ va λ musbat sonlar uchun h operatorning ikkita oddiy xos qiymati mavjudligi va bu xos qiymatlarga mos xos vektorlarning mos qism fazolarda qat'iy musbatligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: spektr, fazo, to'plam, operator, gilbert fazo, xos qiymat

Ushbu ishda ikki o'lchamli panjaradagi bir zarrachali Shrodinger operatori qaralgan va uning spectral xossalari o'rganilgan. $l_2(Z^2)$ orqali Z^2 – ikki o'lchamli butun sonli panjarada aniqlangan va kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning gilbert fazosi belgilanadi, Z_0^2=Z x 2Z va Z_1^2=Z x (2Z+1) belgilashlar kiritamiz,bunda 2Z va 2Z+1 larni mos ravishda Z dagi juft va toq sonlar to'plami deb tushunamiz. va $l_2(Z_1^2)$ lar bilan mos ravishda tashuvchisi Z_0^2 va Z_1^2 larning qismi bo'lgan $l_2(Z^2)$ dagi funksiyalarning qism fazosini belgilaymiz ya'ni

$$l_2(Z_0^2)=\{ f \epsilon\, l_2(Z^2) : \mathrm{supp} f \subset Z_0^2\} ,$$

$$l_2(Z_1^2)=\{ f \epsilon\, l_2(Z^2) : \mathrm{supp} f \subset Z_1^2\} . \qquad (1)$$

$l_2(Z^2)$ gilbert fazosida aaniqlangan va

$$h=h_0 - V_{\mu\lambda} \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanuvchi bir zarrachali Shrodinger operatorini qaraymiz. Bu yerda h_0 va $V_{\mu\lambda}$ operatorlar quyidagi ko'rinishga ega :

$$(h_0\psi)(x)=\Sigma_{s\epsilon Z^2}\tilde{\varepsilon}\,(s)\psi(x+s), \quad \psi(x)\epsilon l_2(Z^2), \qquad (3)$$

$$(V_{\mu\lambda}\psi)(x)=v_{\mu\lambda}(x)\psi(x), \qquad f(x)\epsilon l_2(Z^2) \qquad (4)$$

Shuningdek, $\tilde{\varepsilon}$ (s) va $V_{\mu\lambda}$ funksiyalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$\tilde{\varepsilon}(s)=\begin{cases} 2\,,\ s=0 \\ -\frac{1}{2}\,, s\in\{\pm e_1\,,\ \ \pm e_2\}, \\ 0\,,\ qolgan\ hollarda \end{cases} \qquad (5)$$

$$V_{\mu\lambda}(x)=\begin{cases} \mu\,,\ x=0 \\ \lambda\,,\ x=e_1 \\ 0\,,\ qolgan\ hollarda \end{cases} \qquad (6)$$

Bunda $e_1$va e_2 – Z^2 dagi ortonormal bazis elementlari hamda μ va λ ixtiyoriy musbat sonlardir.

$T^2\equiv(-\pi;\pi]^2$- ikki o'lchovli tor va $L_2(T^2)$ – T^2 da aniqlangan va kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning gilbert fazosi bo'lsin.

Osongina ko'rsatish mumkinki h_0 operator $L_2(T^2)$ dagi ko'paytirish operatori

$$(\tilde{h}_0\, f)\,(p) = \varepsilon\,(p)\,f\,(p),\ \ p=(p_1, p_2)\in T^2 \qquad (7)$$

ga unitar evivalentdir, bunda ε (p) quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varepsilon\,(p) = 2 - \cos p_1 - \cos p_2 \qquad (8)$$

Bu yerda unitar ekvivalentlik

$$F : L_2(T^2) \to l_2(Z^2)\,,\ (Ff)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{T^2} e^{-I\,(x,t)}\,f(t)\,dt\,,\ x\in Z^2\,,\ f\in(Z^2) \qquad (9)$$

Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi.

Unitar operatorlarning spektrlari bir xilligi va $V_{\mu\lambda}$ operator kompakt bo'lgani uchun h_0 va $\tilde{h}_0$ operatorlarning spektrlari ustma-ust tushadi , ya'ni $\sigma_{const}\,(h) = \sigma\,(h) = [0\,;4]$. Osongina tekshirib ko'rish mumkinki $l_2(Z_0^2)$ va $l_2(Z_1^2)$ qism fazolar h operatorga nisbatan invariant bo'ladi va uning bu qism fazolardagi qismini qarasak h_0 operatorning ko'rinishi o'zgarmaydi, lekin $V_{\mu\lambda}$ operatorning ko'rinishi mos ravishda $V_{\mu\lambda}\,|_{l2(Z)}= V_{\mu 0}$ va $V_{\mu\lambda}\,|_{l2(Z)} = V_{0\lambda}$ ko'rinishda bo'ladi.

Birman – Shvvinger prinsipi va Fredgolm teoremasiga asosan

$$(h - zI)\ \ f = 0\,,\in l_2(Z_0^2)(f\in l_2(Z_1^2))\,,\ z\in C\setminus[\,0;4\,] \qquad (10)$$

Tenglama nolmas ($f \neq 0$) yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta_\mu(z) = 0$ ($\Delta_\lambda(z) = 0$) bo'lishi zarur va yetarlidir. Bunda $\Delta_\nu(z)$, $\nu \in R$ quyidagicha aniqlanadi :

$$\Delta_\nu(z) \equiv 1 - \frac{\nu}{(2\pi)^2} \cdot \int_{T^2} \frac{dq}{\varepsilon(q) - z}, \; z \in C \setminus [\, 0;4 \,] \qquad (11)$$

$\Delta_\nu(z)$ funksiya $\nu > 0$ bo'lganda (- ∞ ; 0) da qat'iy monoton kamayuvchi va $\lim\limits_{z \to 0-} \Delta_\nu(z) = -\infty$ bo'lgani sababli quyidagi teorema o'rinli :

Teorema : $\forall\ \mu, \lambda > 0$ uchun h operator ikkita oddiy xos qiymatga ega va bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalar mos ravishda $l_2(Z_0^2)$ va $l_2(Z_1^2)$ qism fazolarda musbat bo'ladi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi :

Natija : Agar $\mu = \lambda$ bo'lsa , u holda h operator ikki karrali yagona xos qiymatga ega va bu xos qiymatga mos xos funksiya $l_2(Z_0^2)$ va $l_2(Z_1^2)$ qism fazolarda qat'iy musbat bo'ladi.

Ta'rif : Agar chiziqli operatorning matrisaviy elementlari faqat ayirmaga bog'liq bo'lsa, u holda bu operatorga Loran tipidagi operator deyiladi.

Lemma : Gilbert fazosida aniqlangan operator Loran tipidagi operator bo'lishi uchun uning barcha operatorlardagi siljitish operatori bilan o'rin almashinuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqridagilarni umumlashtirsak quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

1)Ixtiyoriy o'lchamli panjaradagi zarrachali sistemaga mos Shredinger operatori qo'zg'almas qismi bo'lgan operatorning rezolventasi, sistema kvazimpulsining qiymatlarida musbatlikni kuchaytiruvchi hamda qiymatlarida musbatlikni saqlovchi ekanligini ko'rsatadi.

2)Ixtiyoriy o'lchamli panjaradagi bir zarrachali sistemaga mos qo'zg'almas energiya operatori rezolventasi uchun analitik ifoda topilgan hamda bu rezolventa operatorning musbatlikni kuchaytiruvchi ekanligi isbotlangan.

3)Panjaradagi ixtiyoriy zarrachali sistemaga mos Shredinger operatorining spektri quyi chegarasi yakkalangan nuqta bo'lganda uning oddiy xos qiymat ekanligi isbotlangan va bu xos qiymatga mos qat'iy musbat xos funksiyaning mavjudligi ko'rsatilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1.O.Perron. Math. Ann 64 (1970)

2.O'.N.Quljonov. Panjaradagi bir zarrachali Shredinger operatorining spectral xossalari. SamDU ilmiy axborotnomasi

3.Reed M.and Simon B.:Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York 1979

4.У.Н.Кулжанов. З.Э.Муминов. Нижние связанные состояния одночастичных гамильтонианов на целочисленной решетки. Узбекский математический журнал. Ташкент 2011