O’Q SIMMETRIYASINING KOORDINATALARDA BERILISH USULLARI.

Jasur Mamatov.

JDPI Matematika o’qitish metodikasi

Annotatsiya: Ko’pincha almashtirishlar deganda darhol ko’z oldimizda geometrik tushinchalar paydo bo’ladi. Ammo algebraik almashtirishlar tushinchasi algebra fanida ham ko’p qo’llaniladi. Shundan kelib chiqib, o’q simmetriyasining algebraik ifodalarini keltirib chiqaramiz. Masalan berilgan nuqtaga to’g’ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo’lgan nuqtani topishda geometriya fanida tekislikdagi aksiomalar sistemasidan foydalaniladi. Agar shu masalaga algebraik nuqtaiy nazardan yondashsak, bu tushincha ancha saddalashadi.

To’g’ri chiziq $Px+Qy+R=0$ tenglamasi bilan va A nuqta (p,q) koordinatalar bilan berilgan bo`lsin. $B(p_1,q_1)$ nuqta berilgan to`g`ri chiziqqa nisbatan berilgan $A(p,q)$ tuqtaga simmitrik nuqta bo`lsin. B nuqta koordinatalarini topamiz.

$M(x,y)$ nuqta o`q simmetriyasining ihtiyoriy nuqtasi bo`lsin. U holda $M(x,-\frac{Px+R}{Q})$ koordinatalarga ega bo`ladi. A va B nuqtalar uchun

$$|AM|^2=|BM|^2$$

Munosabat doim o’rinlidir. Bu munosabatning algebraik ifodalardagi ko`rinishi:

$$(x-p)^2+\left(\frac{-Px-R}{Q}-q\right)^2=(x-p_1)^2+\left(\frac{-Px-R}{Q}-q_1\right)^2$$

dan iborat. Oxirgi munoabat o`q simmetriyasiga tegishli ihtiyoriy nuqta koordinatalari uchun o`rinlidir. Shuning uchun bu formulani o`q smmetriyasining almashinuvchi nuqtalarning koordinataridagi ifodasi deb qabul qilsak bo`ladi [1].

Endi quyidagi soddalshtirish ishlarini bajaraylik.

$$-2px+p^2+\frac{2q(Px+R)}{Q}+q^2=-2p_1x+p_1{}^2+\frac{2q_1(Px+R)}{Q}+q_1{}^2,$$
$$2\left(-p+\frac{Pq}{Q}+p_1-\frac{q_1P}{q}\right)x=-p^2-q^2-\frac{2qR}{Q}+p_1^2+q_1^2+\frac{2q_1R}{Q}.$$

Yuqorida takidlaganimizdek bu munosabatlar ihtiyoriy x uchun bajariladi, ya'ni ular ayniyatdir. Shunga ko`ra, oxirgi tengliklardagi barcha koeffitsientlar nolga teng bo`lishligi zarurdir, ya'ni:

$$\begin{cases}-p+\dfrac{Pq}{Q}+p_1-\dfrac{Pq_1}{Q}=0\\ -p^2-q^2-\dfrac{2Rq}{Q}+p_1^2+q_1^2+\dfrac{2Rq_1}{Q}=0.\end{cases}$$

$B(p_1,q_1)$ nuqta koordinatalarini noma'lum sifatida qarab,

$$\begin{cases}p_1-\dfrac{P}{Q}q_1=p-\dfrac{P}{Q}q\\ p_1^2+q_1^2+\dfrac{2R}{Q}q_1=p^2+q^2+\dfrac{2R}{Q}q.\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu erda $p_1=p,\quad q_1=q$ echimlar trivial echimlar xisoblanadi. Biroq, $A\neq B,\quad p_1\neq p\quad q_1\neq q$ dir. Shuning uchun sistemaning ikkinchi tenglamasini

$$p_1^2-p^2+q_1^2-q^2+\frac{2R}{Q}(q_1-q)=0$$

ko`rinishga keltiramiz. Shuningdek birinchi tenglama $p_1-p=\dfrac{P}{Q}(q_1-q)$ ni shunday almashtiraylikki, u $(p_1+p)\dfrac{P}{Q}(q_1-q)+(q_1+q)(q_1-q)+\dfrac{2R}{Q}(q_1-q)=0$ ko`rinishga kelsin. Bu erda q_1-q ga bo`lib, $(p_1+p)\dfrac{P}{Q}+q_1+q+\dfrac{2R}{Q}=0$ ni hosil qilamiz. Ularni birlashtirib

$$\begin{cases}p_1-\dfrac{P}{Q}q_1=p-\dfrac{P}{Q}q.\\ \dfrac{P}{Q}p_1+q_1=-\dfrac{2R}{Q}-\dfrac{P}{Q}p-q.\end{cases}$$

ga ega bo`lamiz. Bu sistema echimlari:

$$\begin{cases} p_1 = p - \dfrac{2P}{p^2+Q^2}\left(P\cdot p + Q\cdot q + R\right) \\ q_1 = q - \dfrac{2Q}{p^2+Q^2}\left(P\cdot p + Q\cdot q + R\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Oxirgi sistema o`q simmetriyasining formulalari deb ataladi. Bu formulalarning ajoyibligi shundan iboratki, agar biz uni $p$ va $q$ larga nisbatan echsak, sistema ko`rinishi umuman o`zgarmaydi, faqat $p$ ва $p_1$, $q$ va $q_1$ lar o`rinlarini almashtiradi, xolos.

Faraz qilaylik: $P=2,\ \ Q=-1,\ \ R=1,\ \ p=3,\ \ q=1,\ \ p_1=m,\ \ q_1=n$ bo`lsin.

U holda

$$m = 3 - \frac{4}{5}(6+1+1) \ \Rightarrow\ m = -\frac{17}{5}$$
$$n = -1 + \frac{2}{5}(6+1+1) \ \Rightarrow\ n = -\frac{11}{5}.$$

O`q simmetriyasining algebraik ifodasidan foydalanib quyidagi masalalarni echamiz.

1-masala: O`q simmetriyasining algebraik ifodasidan foydalanib, $A(p,q)$ nuqtaning to`g`ri chiziqdagi proektsiyasi $M_0(p_0,q_0)$ ning koordinatalarini toping.

Echish: (1) dan foydalanamiz. Dastlab $A(p,q)$nuqtaga simmetrik bo`lgan $B(p_1,q_1)$ni, so`ngra $[AB]$ kesmani teng ikkiga bo`luvchi nuqtani topamiz.

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{p_1+p}{2} = p - \dfrac{2P}{p^2+Q^2}\left(P\cdot p + Q\cdot q + R\right) \\ q_0 = \dfrac{q_1+q}{2} = q - \dfrac{2Q}{p^2+Q^2}\left(P\cdot p + Q\cdot q + R\right). \end{cases} \qquad (2)$$

(2) formulalar yana ajoyib munosabatlarni hosil qilish mumkin. $A(p,q)$ va $B(p_1,q_1)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$|AB|^2 = (p_1-p)^2 + (q_1-q)^2 = \frac{4(P^2+Q^2)}{p^2+Q^2}\cdot(P\cdot p + Q\cdot q + R)^2$$

Bu erda

$$|AM_0|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{(P\cdot p + Q\cdot q + R)^2}{p^2+Q^2}$$

Bundan

$$d = \frac{|P \cdot p + Q \cdot q + R|}{\sqrt{p^2 + Q^2}} \qquad (3)$$

(3) formula $A(p, q)$ nuqtadan $Px + Qy + R = 0$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofani hisoblash formulasidir [2].

Adabiyotlar.

[1]. Shafarevich I.R. Algebraicheskaya preobrazovaniya. Moskva. 1992.

[2]. Benks I.M. Algebraicheskaya preobrazovaniya. Moskva. Azbuka. 2018.

[3].Mamatov, J., & Parmonov, A. (2020). Tasvirli masala matematikani o'qitish samaradorligini oshirish vositasi sifatida. Архив Научных Публикаций JSPI, 109-109.

[4].Mamatov, J. (2020). Tasvirli masalalar tuzishda yo'l qo'yiladigan kamchiliklarni yop'qotish haqida. Архив Научных Публикаций JSPI.

[5].Mamatov, J., Qahhorov, M. ., Parmanov, A. ., & Fayzullaev, S. . (2021). ABOUT THE MAIN TASKS OF TEACHING GEOMETRY AT THE SECONDARY SCHOOL. Журнал математики и информатики, 1(1). извлечено от https://matinfo.jspi.uz/index.php/matinfo/article/view/1239

[6].Mamatov, J. (2020). Matematika fanini o’qitishda shaxsga yo’naltirish va kasbiy faoliyatga yo'naltirishning pedagogik shartlari. Журнал математики и информатики, (1).

[7].Ergashev, J., Usarov, S., Pardayeva, Z., & Mamatov, J. (2021). MASOFAVIY TA’LIM VA UNING IMKONIYATLARI. Журнал математики и информатики, 1(3).

[8].Ergashev, B., Qazibekov, M., Usarov, S., & Mamatov, J. (2021). ZAMONAVIY TA’LIMDA SAMARALI O’QITISHNING BA’ZI SHAKLLARI VA TURLARI. Журнал математики и информатики, 1(3).

[9].Mamatov, J., & Tursunov , M. (2021). PIRAMIDALAR VA ULARNING TEKISLIKLAR BILAN KESIMI. Журнал математики и информатики, 1(2). извлечено от https://matinfo.jspi.uz/index.php/matinfo/article/view/1212

[10].Mamatov, J. (2021). PRIZMALAR VA ULARNING TEKISLIKLAR BILAN KESIMI. Журнал математики и информатики, 1(2). извлечено от https://matinfo.jspi.uz/index.php/matinfo/article/view/1211

[11].Mamatov, J., & Parmanov, A. (2021). PLANIMETRIK MASALALARNI ZAMONAVIY AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VOSITASIDA O'QITISHNING SAMARADORLIGI HAQIDA . Журнал математики и информатики, 1(2). извлечено от https://matinfo.jspi.uz/index.php/matinfo/article/view/1702

[12].Mamatov, J., & Parmanov, A. (2021). "3D CABRILOG V 2" DASTURI VOSITASIDA O'QUVCHILAR FAZOVIY TASAVVURINI RIVOJLANTIRISH . Журнал математики и информатики, 1(2). извлечено от https://matinfo.jspi.uz/index.php/matinfo/article/view/1703