

UCH O'LCHOVLI ARIFMETIK FAZO VA KVATERNIONLAR ALGEBRASI.

Yodgorova Shahzoda Asad qizi

Toshboyeva Sitora Shohmardon qizi

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, 3-bosqich talabalari

Annotatsiya : Ushbu maqola Uch o'lchovli arifmetik fazo va Kvaternionlar algebrasi mavzusi haqida va uning ahamiyati keltirilgan.

Kalit so'zlar: Uch O'lchovli Arifmetik Fazo, Kvaternionlar algebrasi, vektorlar va operatsiyalar, 3D fazo

Uch o'lchovli arifmetik fazo, vektorlar va ularning operatsiyalari, masalan, yig'ish, skalyar ko'paytma va vektorli ko'paytma orqali modellashtiriladi. Kvaternionlar esa, ayniqsa aylanma operatsiyalarni tasvirlashda va kompyuter grafikasi sohasida keng qo'llaniladi.

Uch o'lchovli arifmetik fazo — bu geometriya va fizikada uchta o'lchovli bo'shliqni tasvirlash uchun ishlatiladigan vektorli fazodir. Har bir nuqta ushbu fazoda uchta koordinate (x, y, z) orqali ifodalanadi. - -- x-o'lchov: Gorizontal yo'nalish, y-o'lchov: Vertikal yo'nalish, z-o'lchov: Chuqurlik yoki balandlik yo'nalishi. Uch o'lchovli fazoda vektorlar odatda quyidagicha ifodalanadi: $(v) = (x, y, z)$. Bu yerda (x,y,z) vektorning komponentalari bo'lib, ular har bir o'lchovga tegishli bo'lgan qiymatlardir.

Uch o'lchovli fazoda eng ko'p qo'llaniladigan operatsiyalar:

1)Vektorlar yig'indisi: Ikki vector koordinatalarini qo'shish quyidagicha amalga oshiriladi : $(v) + (u) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

2)Skalyar ko'paytma: Vektor va skalyar sonni ko'paytirish: $c \cdot (v) = (c \cdot x, c \cdot y, c \cdot z)$

3) Vektorlarning skalar (ichki) ko'paytmasi: Ikkita vektor $\mathbf{A} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ning skalar ko'paytmasi quyidagi formulaga ko'ra hisoblanadi: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$. Bu natija skalar (son) bo'ladi va vektorlarning bir-biriga nisbatan yo'nalishini aniqlashda foydalidir.

4) . Vektorlarning vektor (tashqi) ko'paytmasi: Ikkita vektor $\mathbf{A} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ning vektor ko'paytmasi quyidagi formulaga ko'ra hisoblanadi: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$. Natija $\mathbf{C} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$ ko'rinishida bo'ladi. Vektor ko'paytmasi natijasi yangi vektor bo'lib, u \mathbf{A} va \mathbf{B} ga perpendikulyar bo'ladi.

5) Vektor uzunligini (modulini) hisoblash: Vektor $\mathbf{A} = (x, y, z)$ ning uzunligi quyidagi formulaga ko'ra hisoblanadi: $|\mathbf{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Bu uzunlik vektorning o'lchovini ifodalaydi.

Kvaternionlar algebrasi — bu to'rt o'lchovli sonlar to'plamidir, ularning asosiy xususiyati, ular murakkab o'zgartirishlarni, xususan, aylanalarni ifodalashda juda samarali bo'lishidir. Kvaternionlar, asosan, uch o'lchovli aylanma transformatsiyalarini tavsiflashda ishlatiladi, chunki ular Euler burchaklarining burchakli o'zgarishini aniqlashda xatoliklarni kamaytiradi.

Kvaternion odatda quyidagicha ifodalanadi: $q = w + xi + yj + zk$. Bu yerda — w, x, y, z haqiqiy sonlar bo'lib, i, j, k esa kvaternionning birlik vektorlaridir.

1. Asosiy birliklar: $-i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $-ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $-ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.

2. Qo'shish: Kvaternionlar qo'shilishi oddiy haqiqiy sonlar kabi amalga oshiriladi:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

3. Ko'paytirish: Kvaternionlar ko'paytirilishi murakkabroq va distributiv qonun asosida amalga oshiriladi:

$$q_1 \cdot q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

Ko'paytirish natijasida kvaternionlar o'zaro tartibga bog'liq emas (ya'ni, $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$).

4. Modul: Kvaternionning moduli quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

5. Invers: Kvaternionning inversi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$q^{-1} = \bar{q} / |q|^2$$

Bu yerda $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ — kvaternionning konjugati.

Kvaternionlar uch o'lchovli fazoda aylanishlarni ifodalashda juda foydali. Aylanishni $q = \cos(\theta / 2) + \sin(\theta / 2)(xi + yj + zk)$ ko'rinishida ifodalash mumkin, bu yerda θ — aylanish burchagi, (x, y, z) — aylanish o'qi.

Uch o'lchovli fazo keng tarqalgan tushuncha bo'lib, uning yordamida ob'ektlarning joylashuvi va harakati ifodalanadi. Vektorlar, skalyar ko'paytirish va vektor ko'paytirish kabi amallar yordamida bu fazoda turli muammolarni yechish mumkin. Ayniqsa, geometriya va fizikada bu fazoning roli beqiyosdir, chunki u obyektlar va kuchlar o'rtasidagi o'zaro ta'sirlarni aniq va tushunarli tarzda ifodalaydi. Kvaternionlarning asosiy afzalliklaridan biri ularning kommutativ bo'lmasligi va assotsiativligi tufayli, rotatsiyalarni ifodalashda Euler burchaklari yoki matritsalar bilan bog'liq bo'lgan noxush effektlarni (masalan, gimbal lock) bartaraf etishdir. Kvaternionlar yordamida 3D rotatsiyalar ancha sodda va barqaror tarzda amalga oshiriladi, bu esa ayniqsa kompyuter grafikasida, robototexnikada va aeronavtika sohalarida keng qo'llaniladi. Bir muhim jihat shundaki, kvaternionlar har doim to'liq aniq natijalar beradi, chunki ular tasodifiy xatoliklar yoki noaniqliklar kiritishni minimallashtiradi. Bu esa kvaternionlarni kosmik apparatlarning orientatsiyasini aniqlashda ishlatishda muhim ahamiyatga ega. Ularning haqiqiy va to'liq natijalari faqat fizika va mexanikada emas, balki kompyuter simulyatsiyalarida ham optimaldir.

Uch o'lchovli arifmetik fazo va kvaternionlar algebrasi, matematik modellarni yaratish va ularda harakat va rotatsiyalarni boshqarish uchun juda qulay va samarali vosita ekanligini ko'rsatdi. Uch o'lchovli fazo, geometriya, vektorlar va rotatsiyalarni ifodalashda an'anaviy metodlardan foydalanishda qulaylik yaratadi, lekin bu metodlar ba'zi cheklovlarga ega bo'lishi mumkin. Kvaternionlar esa, rotatsiya amallarini amalga oshirishda, ushbu cheklovlarni bartaraf etish va jarayonni soddalashtirish imkonini beradi. Kvaternionlar yordamida 3D rotatsiyalarni ifodalashda yuzaga keladigan Euler burchaklari bilan bog'liq xatoliklar, masalan, gimbal lock muammosi hal etiladi. Kvaternionlar, nafaqat aniq va ishonchli natijalar

taqdim etadi, balki ularni hisoblash va operatsiyalarni bajarish tezligini oshiradi, bu esa ilmiy simulyatsiyalar va dasturlarni samarali qilish imkoniyatini yaratadi. Bu texnologiya, ayniqsa, kompyuter grafikasida, robototexnika va kosmonavtika sohalarida keng qo'llaniladi. Kelajakda kvaternionlar va uch o'lchovli arifmetik fazoning qo'llanilishini yanada kengaytirish va yanada soddalashtirish, ayniqsa sun'iy intellekt va mashinasozlik sohalarida katta ahamiyatga ega bo'ladi. Bu matematik vositalar orqali turli tizimlarni optimallashtirish va yangilash imkoniyatlari ochiladi.

Men bu mavzudan shuni xulosa qildimki uch o'lchovli arifmetik fazo va kvaternionlar algebrasi, geometriya va fizika kabi sohalarda hamda kompyuter grafikasi va robototexnika sohalarida muhim rol o'ynaydi. Uch o'lchovli fazo vektorlar va ularning operatsiyalarini o'z ichiga oladi, kvaternionlar esa murakkab aylanishlarni tasvirlashda samarali vosita bo'lib xizmat qiladi. Bu ikki mavzu birgalikda ko'plab muhim matematik va amaliy masalalarni hal qilishda asosiy vositalardan biridir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. H. To 'rayev. Matematik mantiq va diskret matematika. - T., «O'qituvchi», 2003.
2. A.S. Yunusov, D.I. Yunusova. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tayyorlangan nazorat topshiriqlari to'plami. - T., TDPU. 2004.
3. Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibayeva Sh.E., Shoimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O'quv qollanma. Toshkent 2020.
5. Usarov, S. (2020). Maktabda matematika fani darslarini loyihalashtirish. Журнал математики и информатики, 1(1).
6. Usarov S. "Masalani yechishga o'rgatish orqali matematikani o'qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari". Educational Research in Universal Sciences ISSN: 2181-3515 VOLUME 2 | SPECIAL ISSUE 18 | 2023.
7. Usarov S. "Masalani yechishga o'rgatish orqali matematikani o'qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari". Образование наука и инновационные идеи в мире. Выпуск журнала No – 14 Часть–1 Февраль–2023.